デカルト『幾何学』への幾つかの新しい注

原　亨　吉

昭和48年に白水社から『デカルト著作集』4巻が刊行されたとき，私はその第1巻中で *La Géométrie* の翻訳を担当したが，その際，訳者として加えた注のひとつのなかで，私はつぎのように書いた。

「卵形線〔ovale〕に関するデカルトの研究は，或る遺稿中にその跡が示されている（A T，X，p．310—324)。彼が光学的観点から楕円や双曲線の概念を拡張しようとして卵形線に到達したことは明らかで（詳しくはp.42，l.31— p.44，l.4），この遺稿では，紐を用いてのその描き方（p.42，l.4—17）を述べた後，上述の〔4個の類にわたる卵形線の〕方程式に相当するものを与え，法線を計算により決定して，曲線の光学的性質を証明している。しかし，彼がどのようにして卵形線を発見したかという点自体は明らかでない。云々」

しかし，その後私は，問題の遺稿の始めに近い部分（A T，X，p.311，l.21—p.312，l.16）が上に不明とした点の実情を十分にうかがわせるものであることに気づいた。そしてそこから，この遺稿を全体にわたって入念に検討し，また *La Géométrie* 中の卵形線に関する部分を再読することに導かれた。これらによって新しく得たことは別の機会にまとめて発表することとして，ここではとりあえず，このような作業の結果望ましく感ずるにいたった『幾何学』への新しい注を，かねて機会があれば加えたいと思っていたものとともに，さきの「訳注」にたいする補遺として記しておきたく思うのである。

文献を示すための略号などは，すべて前訳書中のもの（p.83—84；p.112,脚注）を踏襲することとする。

1）p.30，l.20—25：「後者によっては，……その曲線に固有な点はひとつも見いだされていないのである。」（A T，VI，p.411，l.22—29.）

「これらは精密に測りうるいかなる関係ももたない別々の運動によって描かれると想像されるものであるから，……線の範囲に入らない」（p.17，l.15—18，*cf.* A T，VI，p.390，l.11—15）とともに，超越曲線を *La Géométrie* の主題中から除外する特徴的な個所であるが，作者がさきにこの種の曲線の例として挙げた螺線や円積線（訳書，p.17，l.14；

A T, VI, p.390, l. 10) については，作者の目下の主張は受け入れられない。これらの曲線については，その古来の定義に即して，角を等分しうるかぎりにおいてではあるが，欲するだけ多数の曲線上の点を正確に作図しうるからである。しかしながら，デカルトが *La Géométrie* を執筆していた当時すでに問題となり始めており，彼自身1638年８月にはその接線を作図することになるサイクロイド（「解説」p.120, l. 1－2）や，同年未頃に考察する対数曲線（同，l. 6－20）については，ここに言われているとおり，「その曲線に固有な点はひとつも見いだされない」のである。しかしだからと言って，無論，目下の作者の主張を，すでに少くともサイクロイドを念頭においたものであるなどと見るべきではない。それでは，螺線や円積線の排除が説明不能となるからである。結局，問題は彼の坐標の概念にある。前掲の「精密に測りうるいかなる関係ももたない」という表現は，もっぱら長さの間の関係を意味していたと考えねばならない。デカルトが考えた坐標系は平行坐標系のみであり（訳書，p.19, l. 1－4； A T, VI, p.392, l. 20—25)，彼は偏角をひとつの坐標として採用するにはいたらなかったのである。

2）p.41, l. 24—25：「A Fはこれらすべての卵形線を描くに際し……点Fは点Aの位置に来ることになる。」（A T, VI, p.426, l. 10—11.）

A F＝Oのとき，曲線はいわゆるパスカルの蝸牛線（limaçon）となる。ただし，第３類では蝸牛線に内側の輪が欠け，第４類では外側の輪が欠ける。

3）p.42, l. 4－17：「線F A, A G〔第20図〕が相等しいと仮定するとき，……点Cの運動によってこの卵形線が描かれるであろう。」（A T, VI, p.427, l. 8－p.428, l. 13.）

これは，極めて僅かな細部の相違を除いて，卵形線に関するデカルトの遺稿の始めに近い部分に記されていた作図法にほかならない（A T, X, p.311, l. 22—p.313, l. 4)。ところで，これは明らかにふたつの「庭師の方法」——F, Kを焦点，Aを１頂点とする双曲線（H）を描くための方法（訳書，p.176, l. 17—p.177, l. 2； A T, VI, p.176, l. 8－29）と，G, Fを焦点，同じくAを１頂点とする楕円（E）を描くための方法（訳書，*p.*170, l. 12—16; A T, VI, p.166, l. 14—26）——を組み合わせたものであり，これら２個の円錐曲線の離心率はたがいに逆数となっている。それゆえ，(H）の離心率をガラスにたいする空気の屈折率に等しくとったうえ，（H)，(E）をF Gの周囲に回転させて面《H》，《E》を作るならば，点Fから発して空気中を進んだ光線は，《H》を表面とする凸レンズに入ってF Gに平行となり（訳書，*p.*178, l. 5－9； A T, VI, p.179, l. 9－15)，他方，空気中をF Gに平行に左方から来た光線は，《E》を表面とする凸レンズに入ってGに集中する（訳書，*p.*172, l. 6－10; A T, VI, p.168, l. 28—p.169, l. 6)。よって，上記の作図は，(H）と（E）の性質を合わせもつ曲線によって空気中のFから発した光線をガラス中のHに集中させることを考え，そのような曲線を庭師の方法に訴えて実現しようとしたもの，と言うことができるのであり，実にこの着想こそデカルトを卵形線の発見に導いたものであることを，彼の遺稿は示しているのである。すなわち，いま *La Géométrie* 中で卵

形線を描く方法として最後に言及されるものが，実際は作者にとって最初のものだったのである。ただし，この方法はＡＦ＝ＡＧを条件としているにかかわらず，デカルトは始めそのことに気づかず，ＡＦ≠ＡＧの場合にも同じ方法を適用しようとして行きづまりはしたが（ＡＴ，Ｘ，p.313,l. 5—9），それも一時的な挫折にすぎなかった。彼はともかくもＡＦ＝ＡＧの場合について，ＡＦ＝ＡＧ＝a，ＡＫ＝ＫＬ＝ｂとするとき，ｙを媒介変数として，

$$FC = a + \frac{a + 2b}{a} y, \quad KC = b + y, \quad GC = a - \frac{a - 2b}{a} y$$

であることを見いだし，そこから，２個の動径の間に一般的に線形関係を設定するという正解に達したのであった。

４）p.43，l.16—19：「線ＡＧをＡＦより非常に大きくすれば，……この点では卵形よりも心臓の形をしている。」（ＡＴ，VI，p.430,l.17—21.）

正確に言えば，このためにはＡＧ・Ａ６＞ＡＦ・Ａ５が必要である。ＡＧ・Ａ６＜ＡＦ・Ａ５のとき曲線は真の卵形となり，ＡＧ・Ａ６＝ＡＦ・Ａ５のとき曲線は円周となる。この最後の場合については，S_2中にもホイヘンスの指摘にもとづいての言及がある（S_2，p.270)。ちなみに言えば，ホイヘンス自身はすでに1652年10月末にはこのことに気づいていた（H，I，p．186; *cf. ibid.*, p.305)。

５）p.43，l.24—25：「Ａ３Ｙ３はＡのあたりを除き至るところ凸で，……心臓の形をもっている。」（ＡＴ，VI，p.430,l.29—p.431,l. 3.）

前注の場合と同じく，ＡＨ・Ａ６$\gtreqqless$ＡＦ・Ａ５に応じて，曲線は心臓形，円形，真の卵形である。S_2はホイヘンスの指摘にもとづいて「曲線は点ＨおよびＦの位置によってはＡの近くで凸となりうる」と記しているが（S_2，p.276)，ホイヘンス自身はそのための条件ＡＨ：ＡＦ＜Ａ５：Ａ６まで指摘していた（H，I，p.305)。

６）p.43，l.25—27：「この卵形線のふたつの部分の間にある相違と言えば，……点Ｈ以上に他方の部分から離れていることである。」（ＡＴ，VI，p.431,l. 3—7.）

すなわち，のちに「第１の部分」と呼ばれるところ（曲線の作図に用いられた頂点——ここではＡ——の側にある部分）ではＦ３＜Ｈ３，他の頂点の側にある「第２の部分」では反対にＦ３＞Ｈ３。この区分は，卵形線の利用に関する後出の議論に備えたものに相違なく（次注参照），第１類・第２類の卵形線の場合のように，両部分の光学的性質が異なるわけではない。

７）p.47，l.11—20：「こうしてＨを求めたとき，……上に２Ｘ２と名づけたものでなければならない。」（ＡＴ，VI，p.436,l.16—p.437,l.5.）

ＨＹ＞ＦＹのとき（第22図），ＨＹ＝ａ，ＦＹ＝ｂとおき，求める曲線の一般的な点をＥと名づけるならば，ＨＥ＝ａ＋ｅｙ，ＦＥ＝ｂ＋ｄｙ。これは第３類の卵形線であり，

ａｅ＞ｂｄが成りたつだけＨＹが大きいと仮定すれば，この曲線の第１頂点ＹはＭより右に来る（上記の注５参照)。いま，この曲線の第２頂点をY'であらわし，ＥがY'に達したときのｙをy'であらわすことにすれば，ＹY'＝ａ＋（ａ＋ｅy'）＝ｂ＋（ｂ＋ｄy'）から，y'＝（２ａ－２ｂ）／（ｄ－ｅ)。ところで，第21図におけるＹは，実はこのY'にほかならない。よって，本文中の叙述「ＨＹが……ＨＦを超過して，……より大であるならば」（p.47，l.14—16; *cf.* ＡＴ，VI，p.436，l.21—24）にあてはめて言うならば，

$$\frac{Y'H-HF}{Y'F}=\frac{h}{2c+h}=\frac{a+ey'-(a-b)}{b+dy'}=\frac{b+ey'}{b+dy'}\gtreqless\frac{e}{d}\ (b\gtreqless o)\cdot$$

よって，「ｄｈが２ｃｅ＋ｅｈより大であるならば」(l.17）という条件は「ｂ＞ｏであるならば」と同値であり，このとき，第21図のＣＹ（CY'）は第３類の卵形線の「第２の部分」に属する（同じく上記の注５参照)。なお，l.14の「あるいは」（ou bien）は「より正確に言えば」の意味である。つぎに，ｄｈが２ｃｅ＋ｅｈより小であるならば（l.19)，ｂ＜ｏであって，CY'は第２類の卵形線の「第２の部分」に属する。すなわち，ここで作者は線分ＹＦに＋と－の向きを認めていることになる。最後にｄｈ＝２ｃｅ＋ｅｈ，すなわちｂ＝ｏの場合が問題として残る。作者はこの場合をｄｈ＜２ｃｅ＋ｅｈの場合とひとまとめにしているが（l.19)，ｂ＝ｏは第３類・第４類の卵形線に限って認められたことを思えば（上記の注２参照)，ｄｈ≧２ｃｅ＋ｅｈと一括するのが至当であった。

８）p.48，l.22—p.49，l.４：「ＡＭおよびＭＹとして見いだされた２個の量を加え，……ＡＭ，ＭＹがもつべき比に従ってこれを切らねばならない｡」（ＡＴ，VI，p.438，l.22—p.439，l.８.）

ただし，当然必要な２個の不等式ＭＡ＜ＭＧ，ＭＹ＜ＭＦが，場合によっては，ｘ／ｙの値を制約する。

９）p.49，l.６—13：「こうして見いだされた線ＡＭが……ともに双曲線でなければならない｡」（ＡＴ，VI，p.439，l.11—22.）

ＨがＭに関してＦと同側にあり，かつＭＨがＭＦより十分に大きいとき（上記の注５，７の意味で）ＡＣはＧ，Ｈをを焦点とする第１類の卵形線の第１の部分に属して（訳書，p.47，l.26—27，p.48，l.15—16，p.49，l.９；ＡＴ，VI，p.437，l.12—15，p.438，l.12—13，p.439，l.14—15)，ＭＡ＝（ｇｅ＋ｄｋ）／（ｄ－ｅ)であり(訳書，p.48，l.4，16; ＡＴ，VI，p.437，l.27，p.438，l.13)，また，ＹＣは注７にも記したとおり，Ｆ，Ｈを焦点とする第３類の心臓形卵形線の第１の部分に属して（訳書，p.48，l.16—17，p.49，l.９—10; ＡＴ，VI，p.438，l.14—15，p.439，l.15—16)，ＹＭ＝（ｆｅ－ｄｋ）／（ｄ－ｅ）である（訳書，p.48，l.21—22; ＡＴ，VI，p.438，l.22)。

つぎにＨがＭに関してＧと同側にあり，ＡＨがＡＧより十分に大きいときは（同じく注５，７の意味で)，ＡＣはＧ，Ｈを焦点とする第３類の心臓形卵形線の第１の部分に属し，

ＹＣはＦ、Ｈを焦点とする第１類の卵形線の第１の部分に属して（訳書，p.49，l. 11—12; ＡＴ，VI，p.439,l. 18—20)，ＭＡ＝（ｇｅ－ｄｋ）／（ｄ－ｅ)，ＹＭ＝（ｆｅ＋ｄｋ）／（ｄ－ｅ)。

最後にＨがどちらかの側で無限遠にあるときは，ＡＣ，ＹＣは明らかに双曲線に属し，ＭＡ＝ｇｅ／（ｄ－ｅ）となる（訳書，p.49，l. 12—13; ＡＴ，VI，p.439,l. 20—22)。

結局，「点Ｈが〔Ｍに関して〕どちら側にあると仮定しても,」ＹＡ＝（ｆｅ＋ｇｅ）／（ｄ－ｅ）＝ｅ（ＦＣ＋ＧＡ－ＦＧ）／（ｄ－ｅ）である（訳書，p.48，l. 22—p.49，l. 4；ＡＴ，VI，p.438,l. 22—p.439,l. 8)。

以上は，ＨＣ—ＭＨとしてのｋにたいして，注７におけるｂと同様に正，負，ゼロの値を認めつつ，すべての場合を統一的に扱う「代数的」な手法を示すものと言ってよく，これはまた*La Géométric*の全体的傾向，特にその第３巻の精神に合致するものである。